

Exámenes de Selectividad

Matemáticas. Andalucía 2024, Extraordinaria

mentoor.es



Ejercicio 1. Análisis

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = a + b \cos(x) + c \sin(x).$$

Halla a , b y c sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$ a la recta $y = 1$ como recta tangente, y que la recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

La función dada es:

$$f(x) = a + b \cos(x) + c \sin(x).$$

Hallamos la derivada para utilizar la condición de tangencia:

$$f'(x) = -b \sin(x) + c \cos(x).$$

Sabemos que en $x = \frac{\pi}{2}$ la recta tangente es $y = 1$, lo que implica dos condiciones:

1. El punto de tangencia pertenece a ambas funciones:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

2. La pendiente en ese punto debe ser la misma (recta horizontal):

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Aplicando la primera condición:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + c = 1.$$

Aplicando la segunda condición:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -b \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + c \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0.$$

Entonces, hasta ahora tenemos:

$$\begin{aligned} b &= 0, \\ a + c &= 1. \end{aligned}$$

Por otro lado, como la recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en $x = 0$, tendremos que:

$$f(0) = a + b \cos(0) + c \sin(0) = a + b = a.$$

Igualemos con la recta $y = x - 1$ evaluada en $x = 0$:

$$a = 0 - 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1.$$

Usando el valor de a en la ecuación anterior $a + c = 1$ obtenemos:

$$-1 + c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 2.$$

Resumiendo los resultados obtenidos:

$$a = -1, \quad b = 0, \quad c = 2.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{a = -1, \quad b = 0, \quad c = 2}$$

Ejercicio 2. Análisis

Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$.

- Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
- Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución:

- Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, analizamos la derivada de la función:

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}.$$

Calculamos la derivada usando la regla del producto:

$$f'(x) = e^{-x^2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) (-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2} \left[1 - 2x \left(x - \frac{1}{2}\right)\right].$$

Simplificamos el interior del corchete:

$$1 - 2x \left(x - \frac{1}{2}\right) = 1 - 2x^2 + x = -2x^2 + x + 1.$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = e^{-x^2} (-2x^2 + x + 1).$$

Calculamos los extremos relativos igualando a cero la derivada, aunque tenemos en cuenta que el factor e^{-x^2} siempre es positivo, así que el signo depende del polinomio cuadrático:

$$-2x^2 + x + 1 = 0.$$

Resolvemos esta ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \frac{-1 \pm 3}{-4}.$$

Por lo tanto, tenemos dos soluciones:

$$x = -\frac{1}{2}, \quad x = 1.$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$ en los intervalos determinados por estos puntos:

x	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Por lo tanto, la solución es:

$f(x)$ es decreciente $\forall x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$; $f(x)$ es creciente $\forall x \in (-\frac{1}{2}, 1)$

b) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Como hemos visto anteriormente, la función tiene un mínimo local en $x = -\frac{1}{2}$ y un máximo local en $x = 1$. Ahora calculamos los valores:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{4}} = -e^{-\frac{1}{4}}.$$

$$f(1) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) e^{-1} = \frac{1}{2e}.$$

Para extremos absolutos consideramos los límites en los extremos del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Comparando estos valores, tenemos:

- Máximo absoluto en $x = 1$: $f(1) = \frac{1}{2e}$.
- Mínimo absoluto en $x = -\frac{1}{2}$: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -e^{-\frac{1}{4}}$.

Por lo tanto, la solución es:

$$\text{Máximo absoluto: } x = 1, f(1) = \frac{1}{2e}; \quad \text{Mínimo absoluto: } x = -\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right) = -e^{-\frac{1}{4}}$$

Ejercicio 3. Análisis

Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -x^2 + 7$ y $g(x) = |x^2 - 1|$.

- Halla los puntos de intersección de las gráficas de f y g . Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.
- Calcula el área de dicho recinto.

Solución:

- Halla los puntos de intersección de las gráficas de f y g . Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.

Para hallar los puntos de intersección, resolvemos la ecuación:

$$-x^2 + 7 = |x^2 - 1|.$$

Esto lleva a dos casos, según el valor absoluto:

- Caso 1: $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 1$

$$-x^2 + 7 = x^2 - 1 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$$

- Caso 2: $x^2 - 1 < 0 \Rightarrow |x| < 1$

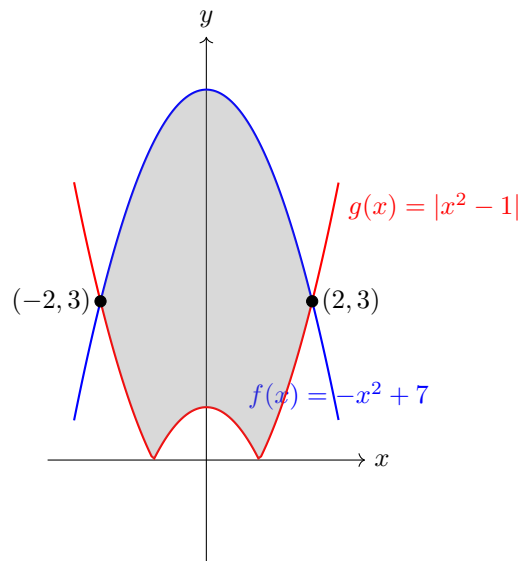
$$-x^2 + 7 = -(x^2 - 1) \Rightarrow -x^2 + 7 = -x^2 + 1 \Rightarrow 7 = 1 \quad (\text{Imposible}).$$

Por lo tanto, los puntos de intersección son:

$$x = -2 \quad \text{y} \quad x = 2.$$

Sustituyendo en cualquiera de las dos funciones podemos encontrar la otra coordenada de los puntos:

$$(-2, 3) \quad \text{y} \quad (2, 3).$$



Por lo tanto, la solución es:

Puntos de intersección: $(-2, 3)$ y $(2, 3)$

b) Calcula el área de dicho recinto.

El área del recinto está dada por la integral definida:

$$\text{Área} = \int_{-2}^2 [(-x^2 + 7) - |x^2 - 1|] dx.$$

Por simetría respecto al eje y , podemos calcular el área como:

$$\text{Área} = 2 \int_0^2 [(-x^2 + 7) - |x^2 - 1|] dx.$$

Separamos la integral según el valor absoluto:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 2 \left[\int_0^1 (-x^2 + 7 + x^2 - 1) dx + \int_1^2 (-x^2 + 7 - (x^2 - 1)) dx \right] \\ &= 2 \left[\int_0^1 6 dx + \int_1^2 (-2x^2 + 8) dx \right] \\ &= 2 \left[6x \Big|_0^1 + \left(-\frac{2x^3}{3} + 8x \right) \Big|_1^2 \right] \\ &= 2 \left[6 + \left(-\frac{16}{3} + 16 + \frac{2}{3} - 8 \right) \right] \\ &= 2 \left[6 + \frac{-16 + 48 + 2 - 24}{3} \right] \\ &= 2 \left[6 + \frac{10}{3} \right] = 2 \cdot \frac{28}{3} = \frac{56}{3} \text{ u}^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución es:

Área del recinto: $\frac{56}{3}$ unidades cuadradas

Ejercicio 4. Análisis

Halla $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$.

Solución:

Para resolver la integral utilizaremos la técnica de integración por partes. Recordemos la fórmula:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Elegimos

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \quad y \quad dv = \cos(x) dx \Rightarrow v = \sin(x).$$

Entonces,

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx.$$

Nuevamente aplicamos integración por partes para la integral restante. Ahora, elegimos

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \quad y \quad dv = \sin(x) dx \Rightarrow v = -\cos(x).$$

Entonces, obtenemos

$$\int e^x \sin(x) dx = -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x) dx.$$

Sustituyendo esto en la expresión inicial, tenemos que

$$\begin{aligned} \int e^x \cos(x) dx &= e^x \sin(x) - \left(-e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x) dx \right) \\ &= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x) dx. \end{aligned}$$

Llamemos

$$I = \int e^x \cos(x) dx.$$

Entonces, la ecuación se convierte en

$$I = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - I \Rightarrow 2I = e^x (\sin(x) + \cos(x)).$$

Así,

$$I = \int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2}.$$

Ahora evaluamos la integral definida desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx &= \left. \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{e^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2})) - e^0 (\sin(0) + \cos(0))}{2} \\ &= \frac{e^{\frac{\pi}{2}} (1 + 0) - (0 + 1)}{2} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución es:

$$\boxed{\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}}$$

Ejercicio 5. Álgebra

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Halla todas las matrices X que cumplen $XA = -AX^t$ y $X^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
- Halla todas las matrices Y que cumplen $YA = AY$, la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante -1 .

Solución:

- Halla todas las matrices X que cumplen $XA = -AX^t$ y $X^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces tenemos las condiciones:

$$XA = -AX^t \quad \text{y} \quad X^2 = I.$$

Evaluamos la primera condición:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

lo que resulta en

$$\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -a & -c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -b & -d \end{pmatrix}.$$

Igualando términos obtenemos:

$$-a = a, \quad b = c, \quad -c = -b, \quad d = -d.$$

De aquí se deduce claramente que

$$a = 0, \quad d = 0, \quad b = c.$$

La matriz X tiene la forma:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora utilizamos la segunda condición $X^2 = I$:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = I.$$

Esto implica que

$$b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \pm 1.$$

Así, las matrices que cumplen ambas condiciones son:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, las soluciones son:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

- b) Halla todas las matrices Y que cumplen $YA = AY$, la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante -1 .

Sea $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La condición $YA = AY$ implica:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Esto da lugar a:

$$\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Igualando términos obtenemos las condiciones:

$$b = -b \quad \text{y} \quad -c = c \quad \Rightarrow \quad b = 0, \quad c = 0.$$

Entonces, la matriz es diagonal:

$$Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

La traza es cero, por lo que:

$$a + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -a.$$

El determinante es -1 , por lo que:

$$ad = -a^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 1.$$

Así obtenemos dos matrices:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, las soluciones son:

$$\boxed{Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 6. Álgebra

Un proveedor de perfumerías vende a sus comerciantes tres tipos de perfumes A, B y C. En un primer pedido una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2200 euros. En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1250 euros.

- ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C?
- Si añadimos que el precio de un perfume de tipo C es $\frac{2}{5}$ del precio de una unidad de tipo A, ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?

Solución:

- ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C?

Sean a , b y c los precios unitarios de los perfumes tipo A, B y C respectivamente. Con los datos proporcionados formamos el sistema:

$$\begin{cases} 20a + 30b + 15c = 2200, \\ 15a + 10b + 10c = 1250. \end{cases}$$

Queremos calcular el valor de $25a + 10b + 16c$. Intentamos expresar esto como combinación lineal de las dos ecuaciones proporcionadas inicialmente:

$$x(20a + 30b + 15c) + y(15a + 10b + 10c) = 25a + 10b + 16c.$$

Al resolver este sistema para las incógnitas a , b y c , encontramos que:

$$\begin{cases} 20x + 15y = 25, \\ 30x + 10y = 10, \\ 15x + 10y = 16. \end{cases}$$

Resolviendo las dos primeras ecuaciones simultáneamente:

$$\begin{cases} 20x + 15y = 25 \\ 30x + 10y = 10 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{2}{5}, \quad y = \frac{11}{5}$$

Comprobamos en la tercera ecuación:

$$15\left(-\frac{2}{5}\right) + 10\left(\frac{11}{5}\right) = -6 + 22 = 16 \quad \checkmark$$

Por tanto, la combinación lineal es correcta, y el importe solicitado es:

$$-\frac{2}{5} \cdot 2200 + \frac{11}{5} \cdot 1250 = -880 + 2750 = 1870 \text{ euros.}$$

Por lo tanto, la solución es:

1870 euros

- Si añadimos que el precio de un perfume de tipo C es $\frac{2}{5}$ del precio de una unidad de tipo A, ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?

Con esta información adicional, $c = \frac{2}{5}a$, el sistema inicial se transforma en:

$$\begin{cases} 20a + 30b + 15\left(\frac{2}{5}a\right) = 2200, \\ 15a + 10b + 10\left(\frac{2}{5}a\right) = 1250. \end{cases}$$

Simplificamos el sistema:

$$\begin{cases} 26a + 30b = 2200, \\ 19a + 10b = 1250. \end{cases}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por 3:

$$57a + 30b = 3750.$$

Restamos ambas ecuaciones:

$$31a = 1550 \quad \Rightarrow \quad a = 50.$$

Sustituyendo en la segunda ecuación original:

$$b = 30$$

Calculamos c :

$$c = \frac{2}{5} \cdot 50 = 20.$$

Por tanto, los precios son:

$$a = 50 \text{ euros}, \quad b = 30 \text{ euros}, \quad c = 20 \text{ euros}.$$

Por lo tanto, la solución es:

$a = 50 \text{ euros}, \quad b = 30 \text{ euros}, \quad c = 20 \text{ euros}$
--

Ejercicio 7. Geometría

Considera el plano $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

- Estudia la posición relativa de π y r .
- Calcula la ecuación de la recta contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es perpendicular a r .

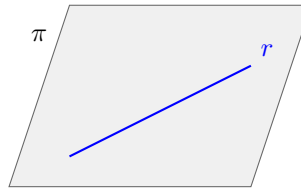
Solución:

- Estudia la posición relativa de π y r .

Sustituimos la ecuación paramétrica de la recta r en el plano π para estudiar la posición relativa:

$$(1 + 2\lambda) - 2(\lambda) + (1) - 2 = 0 \Rightarrow 1 + 2\lambda - 2\lambda + 1 - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Esta igualdad, siempre cierta, implica que todos los puntos de la recta satisfacen la ecuación del plano, lo que indica que la recta r está contenida en el plano π :



Por lo tanto, la solución es:

La recta r está contenida en el plano π .

- Calcula la ecuación de la recta contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es perpendicular a r .

El vector director de la recta r es:

$$\vec{v}_r = (2, 1, 0).$$

La recta buscada debe ser perpendicular a r , por lo que su dirección $\vec{u} = (a, b, c)$ verifica:

$$\vec{u} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (a, b, c) \cdot (2, 1, 0) = 2a + b = 0.$$

Además, como la recta está contenida en el plano π , su dirección también debe ser perpendicular al vector normal del plano $\vec{n}_\pi = (1, -2, 1)$:

$$\vec{u} \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Rightarrow (a, b, c) \cdot (1, -2, 1) = a - 2b + c = 0.$$

Obtenemos el sistema:

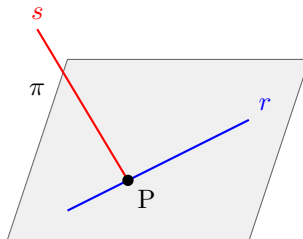
$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

Podemos elegir $a = 1$ (valor arbitrario), así obtenemos:

$$\begin{cases} 2(1) + b = 0 \\ 1 - 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 2b - 1 = -4 - 1 = -5 \end{cases}$$

Por tanto, un vector director adecuado es:

$$\vec{u} = (1, -2, -5).$$



Finalmente, la recta pedida, que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$, tiene la ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = -1 - 2\mu \\ z = -2 - 5\mu \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = -1 - 2\mu \\ z = -2 - 5\mu \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 8. Geometría

Considera los puntos $A(4, 0, 0)$ y $B(0, 2, 0)$. Calcula los puntos del plano OXZ que forman un triángulo equilátero con A y B .

Solución:

Sea el punto buscado del plano OXZ , $C(x, 0, z)$, ya que pertenece a dicho plano y, por tanto, tiene la coordenada $y = 0$. Para que el triángulo ABC sea equilátero, se deben cumplir:

$$\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AB}$$

Calculamos las distancias:

1. Distancia AB :

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-4)^2 + (2-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

2. Distancia AC :

$$\overline{AC} = \sqrt{(x-4)^2 + (0-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + z^2}$$

3. Distancia BC :

$$\overline{BC} = \sqrt{(x-0)^2 + (0-2)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + 4 + z^2}$$

Igualemos estas distancias para formar el triángulo equilátero:

1. $\overline{AC} = \overline{AB}$:

$$\sqrt{(x-4)^2 + z^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow (x-4)^2 + z^2 = 20$$

2. $\overline{BC} = \overline{AB}$:

$$\sqrt{x^2 + 4 + z^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow x^2 + z^2 + 4 = 20 \Rightarrow x^2 + z^2 = 16$$

Obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (x-4)^2 + z^2 = 20 \\ x^2 + z^2 = 16 \end{cases}$$

Restamos la segunda ecuación de la primera:

$$(x-4)^2 + z^2 - (x^2 + z^2) = 20 - 16 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 - x^2 = 4$$

Simplificando:

$$-8x + 16 = 4 \Rightarrow -8x = -12 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Sustituimos $x = \frac{3}{2}$ en la ecuación $x^2 + z^2 = 16$:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + z^2 = 16 \Rightarrow \frac{9}{4} + z^2 = 16 \Rightarrow z^2 = 16 - \frac{9}{4} = \frac{55}{4}$$

Por tanto, obtenemos dos puntos simétricos respecto al plano OX :

$$z = \pm \frac{\sqrt{55}}{2}$$

Por tanto, los puntos buscados son:

$$C_1 = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{55}}{2}\right) \quad y \quad C_2 = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{\sqrt{55}}{2}\right)$$